Vorwort

Da es sich hierbei um eine Lernhilfe von Schülern für Schüler handelt, können, trotz sorgfältiger und häufiger Kontrolle, formale und inhaltliche Fehler nicht ausgeschlossen werden. Im Zweifelsfall wende dich bitte an deinen Mathelehrer oder siehe im Schulbuch nach.

1. Kreis und Kugel

1.1 Kreissektor und Bogenmaß

Definition:

In einem Kreis mit Radius r gilt für r, ein Kreissektor mit Mittelpunktswinkel α:
Flächeninhalt des Kreissektors: $A = \frac{\alpha}{360°} \pi \cdot r^2$
Länge des Kreisbogens: $b = \alpha(360°)\ 2 \cdot r \cdot \pi$

Beispiel:

Manni hat sich alleine eine große Pizza bestellt. Da er Primzahlen toll findet, will er nur 359° der Pizza essen (das ist die größte Primzahl unter 360). Welchen Anteil hat er gegessen?

Lösung:

$= 0.997 \approx 1{,}00$
Manni´s Pizza hatte einen Durchmesser von $28cm$. Welche Pizzafläche hat er gegessen?
$\pi \cdot 14^2 \approx 615{,}75cm^2$

1.2 Volumen der Kugel

Definition:

Wenn r den Radius einer Kugel angibt, so gilt für ihr Volumen $V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi$.

Beispiel:

Berechne das Volumen für eine Kugel mit Radius $r = 10cm$.

Lösung:

$$V = \frac{4}{3} \cdot (10cm)^3 \cdot \pi = \frac{4000}{3} \cdot \pi cm^3 \approx 4188{,}79cm^3$$

1.3 Oberflächeninhalt der Kugel

Definition:

Wenn r der Radius einer Kugel ist, so gilt für ihren Oberflächeninhalt: $O = 4r^2 \cdot \pi$.

Beispiel:

Berechne den Oberflächeninhalt für einen Fußball mit $r = 11{,}5\ cm$.

Lösung:

$O = 4 \cdot (11{,}5cm)^{2\pi} = 529 \cdot \pi\ cm^2 \approx 1661{,}9cm^2 \approx 17dm^2$

2. Lineares und exponentielles Wachstum

Definition:

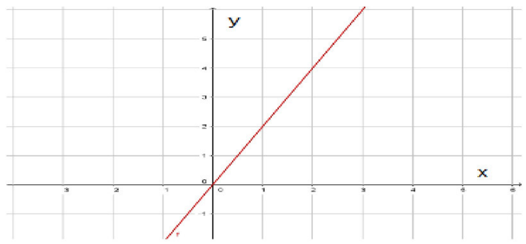
- Nimmt eine Größe pro Zeitschritt stets um den gleichen Betrag zu, ist also **der Zuwachs pro Zeitschritt konstant**, so handelt es sich um ein **lineares Wachstum**.

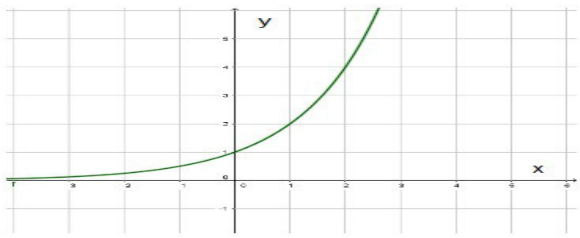
- Nimmt die Größe **pro Zeitschritt stets mit demselben Faktor** zu (direkt proportional Zuordnung) so handelt es sich um ein **exponentielles Wachstum.**

Vergleich:

Lineares Wachstum	Exponentielles Wachstum
Konstanter Zuwachs pro Zeitschritt $d = f(t) - f(t-1)$	$a = \dfrac{g(t)}{g(t-1)}$
$f(t) = f(0) + t \cdot d$ (Absolute Zunahme) $f(0) \triangleq$ Anfangsbestand	$g(t) = g(0) \cdot a^t$ (Relative/prozentuale Zunahme) $g(0) \triangleq$ Anfangsbestand

Beispiel:





Lineares Wachstum: $f(x) = 2x$

Exponentielles Wachstum: $f(x) = 2^x$

2.1 Exponentialfunktionen

$F(x) = b^x$ $\qquad b > 0$ und $b \neq 1$; $D = \mathbb{R}$

Eigenschaften:

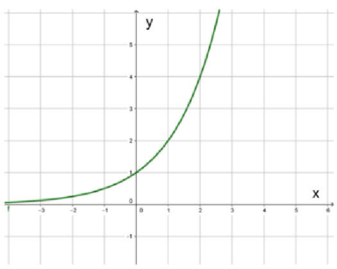
- stets positive Funktionswerte $W = \mathbb{R}^+$

- alle Graphen gehen durch die Punkte **(0|1)** und **(1|b)**

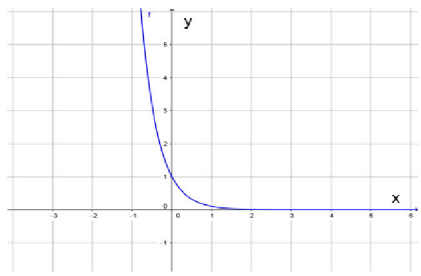
- die Graphen besitzen **keine Nullstellen**

- die **x-Achse** ist die **waagrechte Asymptote** der Graphen

Graphen:



Für $b > 1$ verlaufen alle Graphen **monoton steigend**



Für $0 < b < 1$ alle Graphen **monoton fallend**

2.2 Eigenschaften von Exponentialfunktionen

Definition:

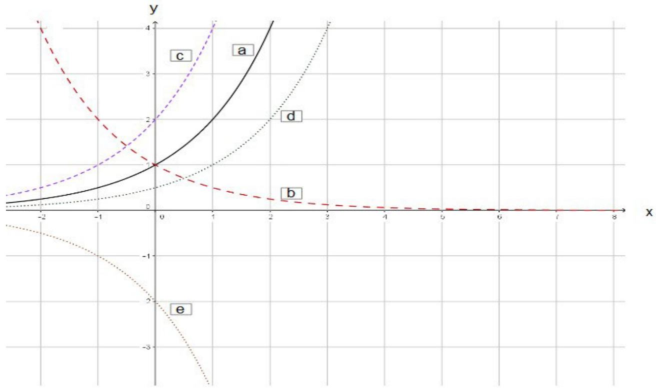
Exponentialfunktionen beschreibt man durch Funktionen der Form $f(x) = a \cdot b^x$.
Diese nennt man Exponentialfunktionen, da die Variable x im Exponenten steht. Dabei muss b positiv sein, da nur dann $b \triangleq 1$ für alle reellen Zahlen definiert ist.

Beachte:

Eine Funktion der Form $x \mapsto b^x$

Beispiel:

- $a(x) = 2^x$
- $b(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^2$
- $c(x) = 2 \cdot 2^x$
- $d(x) = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot 2^x$
- $e(x) = -2 \cdot 2^x$



Eigenschaften der Exponentialfunktion:

- Die größtmögliche Definitionsmenge ist $D = \mathbb{R}$.
- Der Graph schneidet die y-Achse im Punkt $P(0|a)$.
- Der Graph nähert sich der x-Achse beliebig genau, erreicht sie aber nie.
- Die x-Achse ist die Asymptote.
- Spiegelt man den Graphen an der y-Achse, so erhält man den Graphen der Funktion $g(x) = a \cdot \left(\frac{1}{b}\right)^x$.
- Mit positivem, wachsendem x nehmen die Funktionswerte für $b > 1$ zu und für $b < 1$ ab.
- Für positive a sind alle Funktionswerte y positiv.
- Für negative a sind alle Funktionswerte y negativ.
- Wechselt man das Vorzeichen von a, so spiegelt sich der Graph an der x-Achse.

3. Exponentialgleichungen

Definition:

Eine Exponentialgleichung ist eine Gleichung, bei der die Unbekannte (x) im Exponenten einer Potenz 1. (siehe Kasten unten) oder im Wurzelexponenten 2. (siehe Kasten unten) vorkommt.

Beispiel:

1. $2^x = 8$
2. $\sqrt[9]{x}$

3.1 Lösungsverfahren Logarithmieren

	Gegeben ist die Exponentialgleichung:	$3^x - 9 = 0$
Schritt 1:	Aufteilung der Summanden	$3^x = 9$
Schritt 2:	Man logarithmiert beide Seiten der Gleichung:	$\log_{10} 3^x = \log_{10} 9$
Schritt 3:	Man wendet das Logarithmusgesetz für Potenzen auf alle Logarithmen an, die die Unbekannte x im Exponenten enthält, damit die Unbekannte aus dem Exponenten verschwindet	$x \cdot \log_{10} 3 = \log_{10} 9$
Schritt 4:	Man stellt die Gleichung nach x um und enthält so die Lösung	$x = \frac{\log_{10} 9}{\log_{10} 3}$

3.2 Exponentenvergleich

Wenn eine Exponentialgleichung aus zwei Potenzen mit gleicher Basis besteht:	$2^x + 1 = 2^{2x} - 3$
Oder man die Basen der Exponentialgleichung angleicht:	$2^x + 1 = 4 \Leftrightarrow 2^x + 1 = 2^2$
Dann kann man die Exponentialgleichung lösen, indem man beide Exponenten gleichsetzt, denn es gilt der Satz:	$a^x = a^n \Rightarrow x = n$
Beispiel:	$2^x + 1 = 2^{4x} - 3 \Rightarrow x + 1 = 4x - 3$

3.3 Substitution

Exponentialgleichungen mit drei oder mehr Summanden sind nur in Sonderfällen lösbar.

Man löst sie mit dem Lösungsverfahren „Substitution". Damit die Substitution anwendbar ist, müssen in der Exponentialgleichung alle Basen gleich sein, oder sie müssen gleichgemacht werden. Falls die algebraische Gleichung lösbar ist, ist auch die Exponentialgleichung lösbar.

Beispiel:

Gegeben ist die Exponentialgleichung bei der alle Basen gleich sind (hier sind alle gleich 2):	$2^{2x} - 4 \cdot 2^x + 4 = 0$
Dann kann man die Potenzen mit Hilfe der Potenzgesetze angleichen:	$(2^x)^2 - 4 \cdot 2^x + 4 = 0$
Jetzt wird die Potenz 2^x durch u substituiert und die algebraische Gleichung gelöst:	$u^2 - 4u + 4 = 0 \;<=>\; (u-2)^2 = 0 \;<=>\; u = 2$
Jetzt darf man die Rücksubstitution nicht vergessen:	$u = 2^x \;=>\; 2 = 2^x \;=>\; x = 1$

4. Logarithmen

Definition:

Die eindeutige Lösung x der Exponentialgleichung bezeichnet man als Logarithmus von b zur Basis a und schreibt $x = \log_a b$.

Beachte:

$\log_a b$ ist somit derjenige Exponent, mit dem a potenziert werden muss, um b zu erhalten.

Rechenregel:

1. $\log_a(u \cdot v) = \log_a u + \log_a v$
2. $\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a u - \log_a v$
3. $\log_a(u^r) = r \cdot \log_a u$

Beispiel:

1) $2^x = 32 \Rightarrow \log_2 32 = x$
2) $7^0 = 1 \Rightarrow \log_7 1 = 0$
3) $2^{-1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \log_2 \frac{1}{2} = -1$

5. Stochastik

5.1 Bedingte Wahrscheinlichkeit

Definition:

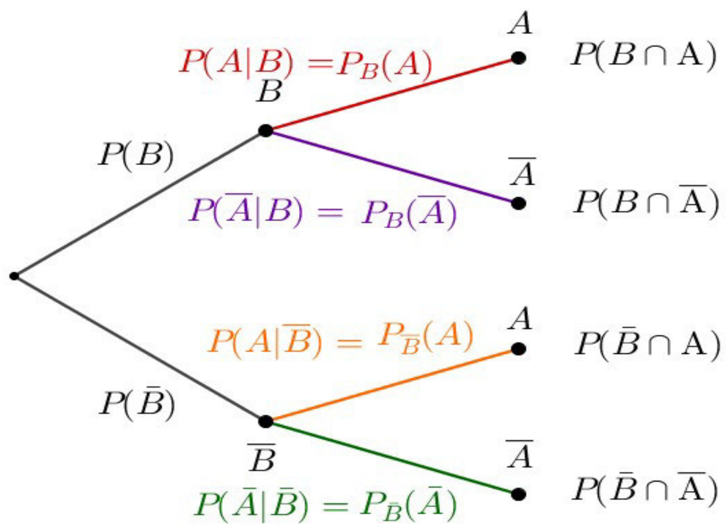
Ein Ereignis B muss eingetreten sein, damit man berechnen kann wie wahrscheinlich es ist, dass Ereignis A auftritt, d.h. die bedingte Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B. Für die Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B schreibt man $P_{B(A)}$ oder $P(A|B)$.

$$P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit am Baumdiagramm:

1. Pfadregel (Produktregel): Bei einem mehrstufigen Zufallsexperiment erhält man die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses, indem man längs des zugehörigen Pfades im Baumdiagramm multipliziert.

2. Pfadregel (Summenregel): Bei einem mehrstufigen Zufallsexperiment erhält man die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses, indem man die Summe der Wahrscheinlichkeiten bildet, die zu den Ereignissen gehören.



[1]

5.2 Ereignisse und Vierfeldertafel

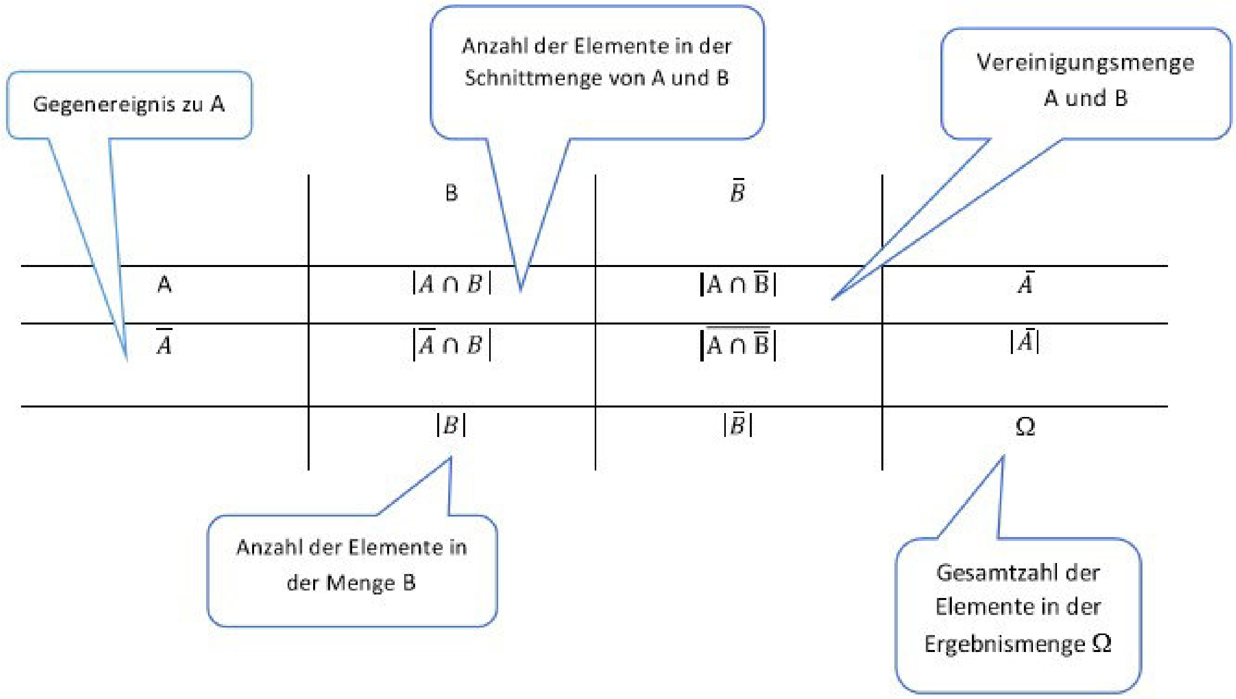
Definition:

Ereignis → 8. Klasse

Vierfeldertafel

Will man zwei Ereignisse gleichzeitig betrachten, so eignet sich eine Vierfeldertafel. Um sie aufzustellen, benötigt man noch die jeweiligen Gegenereignisse. Man erhält so vier Felder für alle Kombinationsmöglichkeiten. Die Randfelder enthalten die Gesamtzahl der Elemente der jeweiligen Ereignisse.

[1] Abbildung 1: https://de.serlo.org/mathe/stochastik/bedingte-wahrscheinlichkeit-unabhaengigkeit/bedingte-wahrscheinlichkeit/bedingte-wahrscheinlichkeit



Beispiel:

In einer Urne sind Kugeln, die entweder rot oder blau sind. Das Verhältnis von roten zu blauen Kugeln beträgt 2:3. Auf 50 Kugeln steht außerdem eine Zahl, dies ist ein Drittel aller Kugeln. Auf 60 blauen Kugeln steht keine Zahl.

a) Wie viele Kugeln sind rot und tragen eine Zahl?
b) Wie viele Kugeln sind rot oder tragen eine Zahl?

	R		
Z	20	30	50
	40	60	100
	60	90	150

6. Potenzfunktionen

Definition:

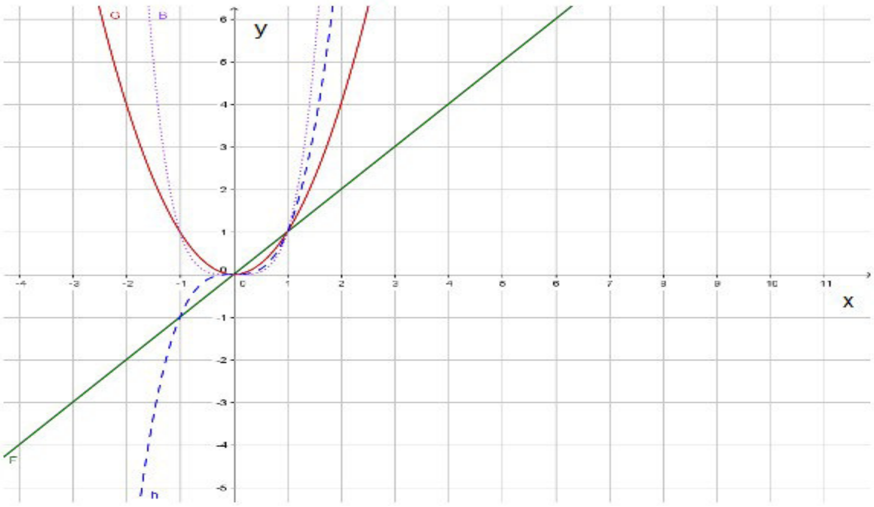
Funktionen der Form $x \mapsto a \cdot x^n$ $(a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; n \in \mathbb{N})$ nennt man **Potenzfunktionen (n-ten Grades)**.

Man betrachtet häufig:

- Symmetrie
- Steigungsverhalten
- Wertemenge
- Charakteristischer Verlauf

Beispiele:

- $F_{1(x)} = x$ (durchgezogene Linie (konstant))
- $F_{2(x)} = x^2$ (Parabel)
- $F_{3(x)} = x^3$ (gestrichelt)
- $F_{4(x)} = x^4$ (gepunktet)



	n **gerade**	n **ungerade**
Symmetrie	achsensym. zur y- Achse	punktsym. zum Ursprung
Steigungsverhalten (abhängig von Koeffizient)	Für $x < 0$ fällt der Graph für $x > 0$ steigt der Graph	Der Graph steigt
Wertemenge (abhängig von Koeffizient)	$W = \mathbb{R}_0^+$	$W = \mathbb{R}$
Verlauf (abhängig von Koeffizient)	Von links oben nach rechts oben	Von links unten nach rechts oben

Bemerkung:

- Für $|a| > 1$ wird der Funktionsgraph in y-Richtung **gestreckt.**
- Für $0 < |a| < 1$ wird der Funktionsgraph in y-Richtung **gestaucht.**
- Für $a < 0$ wird der Funktionsgraph an der x-Achse **gespiegelt.**

6.1 Ganzrationale Funktionen

Beispiele:

$P_{1(x)} = 3x^5 + 7 \cdot x^2 + x - 1$
$P_{2(x)} = x^9 + 3 \cdot x^2 + 1$

Definition:

Summen von Potenzen derselben Variable x (Exponenten aus $\mathbb{N}_0$) und der zugehörigen Koeffizienten nennt man **Polynome.**

- Eine Funktion, deren Funktionsterm ein Polynom ist heißt **ganzrationale Funktion**.

Der höchste echte Exponent von x heißt: Grad des Polynoms.

Beispiel:

$f(x) = 0 \cdot x^7 + 3 \cdot x^3 + 2 \cdot x$ Grad $f(x) = 3$

Beachte:

Der Summand mit dem höchsten Exponenten im Funktionsterm ist maßgeblich für das Verhalten der Funktion bei betragsmäßig großen x-Werten (vgl. Potenzfunktionen).

6.2 Nullstellen ganzrationaler Funktionen

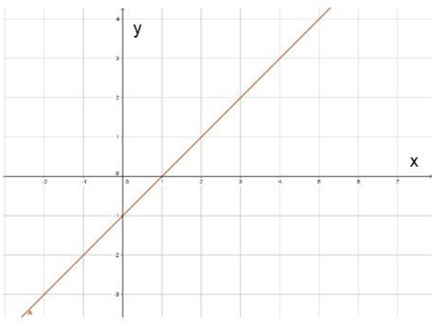
Definition:

Eine ganzrationale Funktion $f(x)$ vom Grad n, besitzt höchstens n Nullstellen. Eine Nullstelle b heißt k-Fache Nullstelle von $f(x)$, wenn sich $f(x)$ in der Form $f(x) = (x - b)^k \cdot g(x)$ darstellen lässt (mit $g(b) \neq 0$).

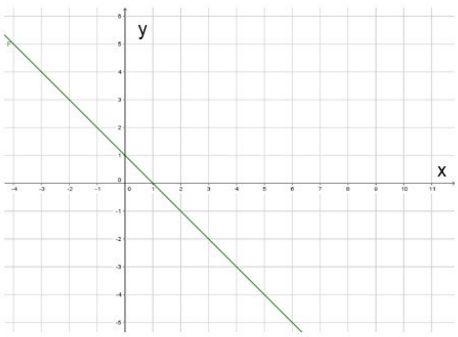
Daraus lassen sich zwei Graphenverläufe ableiten:

- $\boldsymbol{k}$ **gerade:** kein Vorzeichenwechsel des Graphen an der x- Achse
- $\boldsymbol{k}$ **ungerade:** Vorzeichenwechsel an der x- Achse

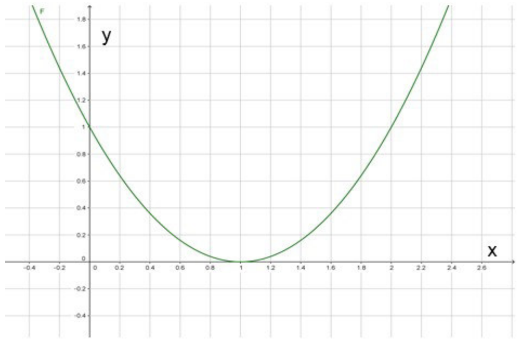
Beispiele:



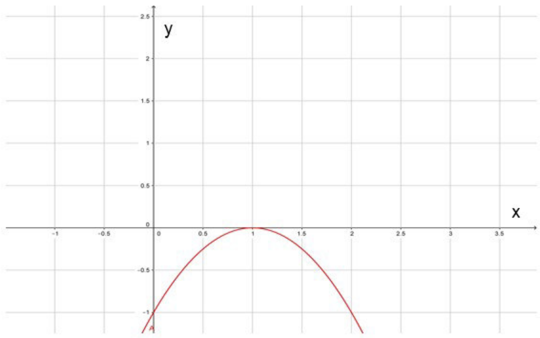
Einfache Nullstelle $x \mapsto (x-1)$



Vorzeichenwechsel der Funktionswerte $x \mapsto -(x-1)$



Doppelte Nullstelle $x \mapsto (x-1)^2$



kein Vorzeichenwechsel $x \mapsto -(x-1)^2$

6.3 Polynomdivison

Um Bruchterme wie $\frac{5x^2+7x+2}{x+1}$ zu vereinfachen, verwendet man zur Division folgendes Verfahren, wodurch man Nullstellen berechnen kann.

$$\begin{array}{l} 572 : 11 = 52 \\ \underline{-55} \\ \quad 22 \\ \quad \underline{-22} \\ \qquad 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (5x^2 + 7x + 2) : (x+1) = 5x + 2 \\ \underline{-(5x^2 + 5x\ )} \\ \qquad\qquad 2x + 2 \\ \qquad\quad \underline{-(2x + 2\ )} \\ \qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

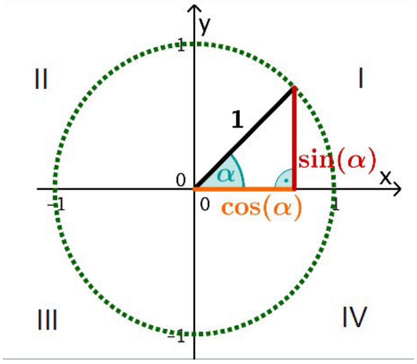
Dividiere $5x^2$ durch x.
Multipliziere $5x$ mit $(x+1)$ und
Subtrahiere von $5x^2 + 7x + 2$
Wiederhole das Verfahren für den
Dividenden $(2x+2)$ und den Divisor
$(x+1)$

Polynomdivision

- Ordne Dividend und Divisor nach fallenden Potenzen der Variablen.
- Dividiere den 1. Summanden des Dividenden durch den 1.Summanden des Divisors.
- Multipliziere das Ergebnis mit dem Divisor und subtrahiere es vom Dividenden.
- Wiederhole das Verfahren mit dem sich ergebenden „Rest“.

7. Trigonometrie

7.1 Sinus und Kosinus am Einheitskreis



[2]

Im rechtwinkligen Dreieck kann α nur Werte zwischen 0 und 90 annehmen. Um alle möglichen Winkel zulassen zu können, stellt man sich die Werte für Sinus und Kosinus am Einheitskreis (Kreis mit Radius $r = 1\,LE$) vor.

Quadrant	I	II	III	IV
Sinuswerte	$+$	$+$	$-$	$-$
Kosinuswerte	$+$	$-$	$-$	$+$

7.2 Die Sinus- und Kosinusfunktion

	$\boldsymbol{Sin(x)}$	$\boldsymbol{Cos(x)}$
Definitionsmenge	$D = \mathbb{R}$	$D = \mathbb{R}$
Wertemenge	$W = [-1; 1]$	$W = [-1; 1]$
Nullstellen $k \in \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}$	$x = k \cdot \pi$	$X = ½ \cdot \pi + k \cdot \pi$
Symmetrie	punktsym. zum Ursprung	achsenym. zur x- Achse
Periode	$2 \cdot \pi$ $\sin(x) = \sin(x + 2 \cdot \pi \cdot k)$ $k \in \mathbb{R}$	$2 \cdot \pi$ $\cos(x) = \cos(x + 2 \cdot \pi \cdot k)$ $k \in \mathbb{R}$

7.3 Allgemeine Sinusfunktion

1. $y = a \cdot sinx$

$|a| > 1$: Der Graph der Sinusfunktion wird **in y- Richtung gedehnt. (Amplitudenvergrößerung)**
$0 < |a| < 1$: Der Graph der Sinusfunktion wird **in y- Richtung gestaucht. (Amplitudenverkleinerung)**
Falls $a < 0$ ist, wird der Graph noch zusätzlich an der **x- Achse gespiegelt.**

2. $y = \sin(bx)$

$|b| > 1$: Der Graph der Sinusfunktion wird **in x- Richtung gestaucht. (Frequenzenvergrößerung)**
$0 < |b| < 1$: Der Graph der Sinusfunktion wird **in x-Richtung gedehnt. (Frequenzenverkleinerung)**
Falls $b < 0$ ist, wird der Graph noch zusätzlich an der **y- Achse gespiegelt.** Zu beachten ist hier auch die Änderung der Periode zu $\frac{2}{|b|}$.

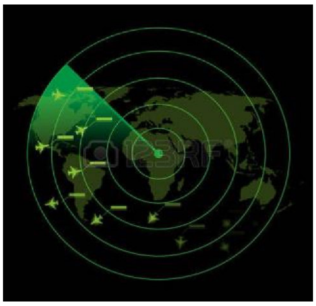
[2]Abbildung 2: https://de.serlo.org/mathe/geometrie/sinus-kosinus-tangens/sinus-kosinus-tangens-einheitskreis/trigonometrie-einheitskreis

3. $y = \sin(x + c)$

Der Graph der Sinusfunktion wird um $|c|$ in x- Richtung verschoben **(Phasenverschiebung).**
$c > 0$: Verschiebung nach links
$c < 0$: Verschiebung nach rechts

Beispiel:

1. $f1(x) = sinx + \boldsymbol{d}$ (durchgezogene Linie)
2. $f2(x) = \boldsymbol{a} \cdot sinx$ (liniert)
3. $f3(x) = sin \cdot (\boldsymbol{b} \cdot x)$ (punktiert)
4. $f4(x) = sin \cdot (x + \boldsymbol{c})$ (liniert und punktiert)



7.4 Trigonometrie aus geometrischer und funktionaler Sicht [3]

Funktionsweise eines Radars
Man kennt den Winkel der Antenne zur (x-Achse) und den Abstand des Objekts. Diese Art von Koordinaten nennt man auch Polar und schreibt für den Punkt P: $\boldsymbol{P\ (Abstand;\ Winkel).}$

Umrechnung in kartesische Koordinaten
Das runde Flugzeug oben hat den Abstand 2 km vom Ursprung und der Winkel ist 45°: $F(2; 45°)$. Die kartesischen Koordinaten für die Abfangjäger:
$x_F = 2 \cdot \cos(45°) = \sqrt{2}\ y_F = 2 \cdot \sin(45°) = \sqrt{2} \quad F(\sqrt{2}|(\sqrt{2})$

Erweiterung der Sinus – und Kosinusdefinition
Um die kartesischen Koordinaten für den eckigen Flugzeugträger angeben zu können vereinbart man Folgendes:

Definition:
Für einen beliebigen Punkt $\boldsymbol{P(x|y)}$ mit den Polarkoordinaten $P(1|\ \alpha)$ auf dem Einheitskreis (Radius 1) gilt für Sinus und Kosinus: $x = \cos\alpha$ und $y = \sin\alpha$

7.5 Sinus, Kosinus und Tangens im rechtwinkligen Dreieck

Der Winkel α lässt sich über zwei Zusammenhänge am rechtwinkligen Dreieck berechnen:

$$\sin\alpha = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse}; \qquad \cos\alpha = \frac{Ankathete}{Hypotenuse}; \qquad \tan\alpha = \frac{Gegenkathete}{Ankathete}$$

7.6 Umrechnung in Bogenmaß

Sinus und Kosinus werden häufig statt im Gradmaß im Bogenmaß dargestellt.
Das Bogenmaß ist der Bruchteil des Kreisbogens, der zum Winkel α gehört.
Über den Zusammenhang $\frac{x}{\pi} = \frac{\alpha}{180}°$ lässt sich das Gradmaß α in das Bogenmaß x umrechnen und umgekehrt.

$x = \frac{\alpha}{180°} \cdot \pi \qquad \alpha = \frac{x}{\pi} \cdot 180°$

[3] Abbildung 3: https://se.depositphotos.com/96331178/stock-illustration-air-traffic-controller-working-in.html